МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 581.1 DOI 10.12737/19702

Моделирование подъема воды в системах цилиндрических капилляров разного радиуса*

И. А. Кипнис[1], Ю. М. Вернигоров[2]**
[1]Научно-производственная фирма «КАСИОР», г. Москва, Российская Федерация
[2]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Modeling of water rising in systems of cylindrical capillaries of different radii ***

I. A. Kipnis[1], Yu. M. Vernigorov[2]**
[1] "KASIOR" Research and Production Company, Moscow, Russian Federation
[2] Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Детально изучено продвижение воды в системах цилиндрических капилляров. Построена математическая модель продвижения воды как в симметричных, так и в несимметричных капиллярах, соединенных с вертикальным капилляром. При этом радиусы как вертикальных, так и расположенных под углом капилляров, считались одинаковыми. На основании математической модели установлены общие свойства продвижения воды в ветвящихся капиллярах. В частности, наибольшее продвижение воды происходит в нижнем уровне капилляров. Установлено, что своей формой растения обязаны наличию в них капиллярных систем. Однако капиллярные системы различных частей растений отличаются радиусами. Например, диаметр центральной жилки листа больше диаметра капилляров листовой пластинки. В работе рассмотрены закономерности продвижения воды в ветвящихся капиллярных системах с капиллярами разного радиуса. Получено выражение для расчета критической высоты вертикального капилляра, при которой вода не поступает в наклонные капилляры из вертикального. Показано, что при определенных условиях высота подъема воды в вертикальном капилляре может до двух раз превышать высоту подъема воды в одиночном вертикальном капилляре того же радиуса.

The promotion of water in the systems of cylindrical capillaries is studied in detail. A mathematical model of the water movement in both symmetric and asymmetric capillaries connected to a vertical capillary is built. In this case, the radii of both vertical and angled capillaries are considered identical. General properties of the water movement in branching capillaries are determined on the basis of the mathematical model. In particular, the greatest promotion of water occurs in the lower level of the capillaries. It is found that the shape of plants depends on the presence of capillary systems in them. However, the capillary systems of various parts of the plants differ in radii. For example, the diameter of the central capillary of a leaf is larger than that of the capillaries in the lamina. The patterns of water movement in the branching capillary systems with capillaries of different radii are considered. An expression for calculating the critical vertical capillary height at which water does not come from the vertical capillary to the inclined capillaries is obtained. It is shown that under certain conditions, the height of water in a vertical capillary can twofold exceed the height of water in a single vertical capillary of the same radius.

Ключевые слова: растение, капилляры, ксилема, модель, транспирация.

Keywords: plant, capillaries, xylem, model, transpiration.

Введение. Движение и распределение воды в растениях изучается в течении многих десятилетий и описано в монографиях по физиологии растений [1–2]. Детально описано и анатомическое строение водопроводящих путей (ксилемы) в растениях [3–5]. Многочисленные экспериментальные исследования различных аспектов движения воды в ксилеме растений опубликованы в научной литературе. Так, например, в [6] рассмотрены вопросы накопления и депонирования воды во флоэме и последующий ее возврат в ксилему при дефиците почвенной влаги. В [7] рассмотрены вопросы продвижения воды в ксилеме в условиях климатического стресса. Однако, до настоящего времени в лите-

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.
** E-mail: ikipnis@yandex.ru, jvernigorov@dstu.edu.ru
*** The research is done within the frame of the independent R&D.

ратурных источниках дискутируется вопрос о силах, обеспечивающих подъем и распределение воды при её продвижении в ксилеме [8].

В работах [9–11] изучено продвижение воды в ветвящихся симметричных и несимметричных капиллярных системах, все ветви которых представляют собой цилиндрические капилляры одинакового радиуса, соединенные с вертикальным капилляром того же радиуса и расположенные под углом к нему. Установлено, что наибольшее продвижение воды как в прямолинейных, так и в криволинейных боковых ветвях происходит в самом нижнем уровне и уменьшается в ветвях каждого из последующих уровней. Наличие боковых капилляров приводит к увеличению высоты подъема воды в вертикальном капилляре по сравнению с одиночным вертикальным капилляром того же радиуса. Формой растения и их части обязаны наличию в них капиллярных систем [9–11]. Доказано, что единственной силой, обеспечивающей подъем воды в ксилеме растений, является сила поверхностного натяжения воды в менисках капилляров [10]. При этом линия, последовательно соединяющая мениски воды в капиллярах ветвей разных уровней, образует фигуру, по форме напоминающую коническую крону дерева или листа. Корневое давление компенсирует, как максимум, гидравлические потери, возникающие при движении воды через систему окаймленных пор трахеид ксилемы хвойных растений [12]. Принятые в работах [9–11] модели идеализированы, но в природе такая идеализация не наблюдается. Диаметр ствола и ветвей нижних уровней больше, чем диаметр ветвей более высоких уровней и ветвей более высоких порядков. По мере роста дерева диаметр существующих ветвей увеличивается. Одновременно с этим появляются новые ветви, диаметр которых значительно меньше диаметра уже имеющихся ветвей. Диаметр капилляров центральной жилки листа больше диаметра связанных с ним капилляров листовой пластинки и т. д.

Цель работы. Определение закономерностей продвижения и распределения воды в ветвящихся капиллярных системах с капиллярами разного диаметра.

Теоретическая модель. Допустим, что имеется система, состоящая из трех капилляров разного радиуса, один из которых вертикален и погружен в воду, а остальные два наклонены под углами $\beta^1_{1пр}$ и $\beta^1_{1лв}$ к горизонтали, как показано на рис. 1, *а*. Примем, что радиус вертикального капилляра

$$n \geq r_2 + r_3, r_2 = nr_3. \quad (1)$$

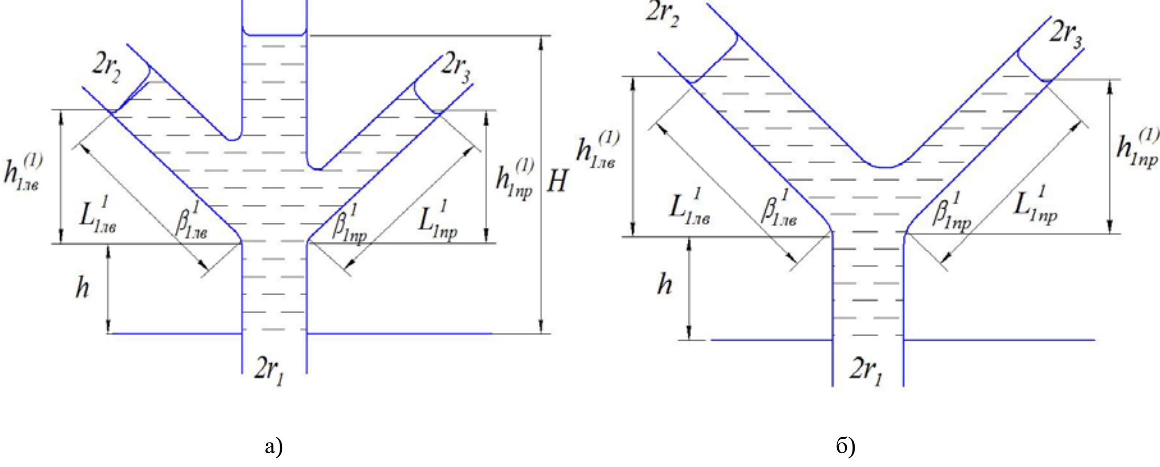
Учитывая, что сила поверхностного натяжения воды $F_н$ в мениске капилляра

$$F н = 2\pi\ r\sigma \cos\ \alpha \quad (2)$$

прямо пропорциональна коэффициенту поверхностного натяжения воды σ, косинусу угла смачивания α и радиусу капилляра r [12], определим какую долю вносит каждый из наклонных капилляров в подъем воды в вертикальном капилляре. Равнодействующая сил, обеспечивающая подъем воды в вертикальном капилляре, пропорциональна сумме радиусов наклонных капилляров:

$$r_2 + r_3 = nr_3 + r_3 = (n+1)r_3. \quad (3)$$

Можно считать, что правый капилляр поднимает 1/(*n* +1) часть воды в вертикальном капилляре, а левый *n*/(*n*+1) часть воды. Обозначим высоту вертикального капилляра через *h*. Величины продвижения и высоты подъема воды в правой и левой ветвях обозначим соответственно через $L^1_{1пр}, L^1_{1лв}, h^1_{1пр}, h^1_{1лв}$.



а) б)

Рис. 1. Модели капиллярных систем с капиллярами разного диаметра

Учитывая эти соотношения и полагая в (2) α = 0, уравнения продвижения воды в капиллярах правой и левой ветвей могут быть записаны в виде:

$$\frac{1}{n+1}\pi r_1^2\rho gh+\pi r_3^2\rho gL_{1пр}^1\sin\beta_{1пр}^1=2\pi r_3\sigma, \quad (4)$$

$$\frac{n}{n+1}\pi r_1^2\rho gh+\pi n^2 r_3^2\rho gL_{1ЛВ}^1\sin\beta_{1ЛВ}^1=2\pi n r_3\sigma. \quad (5)$$

Сокращая обе части уравнений (4) и (5) на $\pi r_3^2\rho g$ получим:

$$L_{1пр}^1\sin\beta_{1пр}^1=h_3-\frac{1}{n+1}(\frac{r_1^2}{r_3^2})h=h_{1пр}^1, \quad (6)$$

$$L_{1лв}^1\sin\beta_{1лв}^1=\frac{1}{n}(h_3-\frac{1}{(n+1)}(\frac{r_1^2}{r_3^2})h)=h_{1лв}^1, \quad (7)$$

где h_3 — высота подъема воды в одиночном вертикальном капилляре радиуса r_3.

Из (6) и (7) следует, что высота подъема воды в левом капилляре большего радиуса в n раз меньше, чем в правом, а разность высот подъема составляет

$$h_{1пр}^1-h_{1лв}^1=h_3-\frac{1}{n+1}(\frac{r_1^2}{r_3^2})h-\frac{1}{n}h_3+\frac{1}{n(n+1)}(\frac{r_1^2}{r_3^2})h=\frac{(n-1)}{n}(h_3-\frac{1}{n+1}h(\frac{r_1^2}{r_3^2})). \quad (8)$$

Таким образом, разность высот подъема воды в наклонных ветвях не зависит от угла наклона ветвей, а зависит только от соотношения радиусов капилляров.

При $n=1$, $r_2=r_3$, $h_{1пр}^1-h_{1лв}^1=0$, $\beta_{1пр}^1=\beta_{1лв}^1, h_{1пр}^1=h_{1лв}^1=h_3-\frac{1}{2}h$, что полностью совпадает с результатами, полученными в [1].

Из соотношений (6) и (7) можно также видеть, что продвижение воды в левой и правой ветви при $n\neq 1$ не одинаково. В частности, из (7) следует, что продвижение воды и в левом капилляре большего радиуса при условии $\beta_{1пр}^1=\beta_{1лв}^1$ в n раз меньше, чем в правом. При $\beta_{1пр}^1=\beta_{1лв}^1=0$ наклонные ветви располагаются горизонтально. В случае, когда $\beta_{1пр}^1=\beta_{1лв}^1=90^0$, наклонные ветви принимают вертикальное положение, а разность высот подъема воды в них определяется соотношением (7). Отношение

$$L_{1пр}^1/L_{1пр}^1=n\frac{\sin\beta_{1пр}^1}{sin\beta_{1лв}^1} \quad (9)$$

показывает, что продвижение в наклонных капиллярах зависит от соотношения как радиусов, так и углов наклона к горизонтали.

Полагая в (6) или (7) $h_{1пр}^1=h_{1лв}^1=0$, можно определить критическую высоту $h_{кр}$ при которой вода из вертикального капилляра не будет поступать в наклонные ни при каких условиях:

$$h_3-\frac{1}{n+1}(\frac{r_1^2}{r_3^2})h=0,$$

$$h_3=\frac{1}{n+1}(\frac{r_1^2}{r_3^2})h\rightarrow h=h_{кр}=h_3(n+1)(\frac{r_3^2}{r_1^2}). \quad (10)$$

В модели на рис. 1, б подъем воды происходит под действием сил поверхностного натяжения в менисках трех капилляров, имеющих разные радиусы. Как и в предыдущем случае, выполняется условие (1), а соотношение радиуса вертикального капилляра с меньшим из боковых капилляров равно $r_1=mr_3$. Тогда правый боковой капилляр поднимает в общей части вертикального капилляра на высоту h только $\frac{1}{m+n+1}$ часть объема воды, левый боковой капилляр $\frac{n}{m+n+1}$, а вертикальный — остальную часть объема воды, пропорциональную $\frac{m}{m+n+1}$.

В этом случае уравнения, описывающие продвижение воды в боковых капиллярах и высоту ее подъема H в вертикальном капилляре запишутся следующим образом:

$$\frac{1}{m+n+1}\pi r_1^2\rho gh+\pi r_3^2\rho gL_{1пр}^1\sin\beta_{1пр}^1=2\pi r_3\sigma, \quad (11)$$

$$\frac{n}{m+n+1}\pi r_1^2\rho gh+\pi r_2^2\rho gL_{1лв}^1\sin\beta_{1лв}^1=2\pi r_2\sigma, \quad (12)$$

$$\frac{m}{m+m+1}\pi r_1^2\rho gh+(H-h)\pi r_1^2\rho g=2\pi r_1\sigma. \tag{13}$$

Сокращая (11), (12) и (13) соответственно на $\pi r_3^2\rho g, \pi r_2^2\rho g$ и $\pi r_1^2\rho g$ получим выражения для $L_{1пр}^1, L_{1лв}^1$ и H :

$$L_{1пр}^1\sin\beta_{1пр}^1=h_3-\frac{1}{m+n+1}(\frac{r_1^2}{r_3^2})h=h_{1пр}^1, \tag{14}$$

$$L_{1лв}^1\sin\beta_{1лв}^1=h_2-\frac{n}{m+n+1}(\frac{r_1^2}{r_2^2})h=h_{1лв}^1, \tag{15}$$

$$H=h_1+(1-\frac{n}{m+n+1})h. \tag{16}$$

Из (14)–(16) следует, что с увеличением m и n (что эквивалентно уменьшению r_3) порознь или одновременно величины $L_{1пр}^1, L_{1лв}^1, h_{1пр}^1, h_{1лв}^1$ и H уменьшаются. Высота подъема воды при этом в капилляре малого радиуса увеличивается, так как высота подъема воды в одиночном капилляре h_3 обратно пропорциональна радиусу капилляра r_3, а коэффициент перед вторым слагаемым в (14) пропорционален первым степеням m и n. При $m = n = 1$ уравнения (14)–(16) совпадают с аналогичными уравнениями в [9] и описывают распределение воды в аналогичной системе с капиллярами равных радиусов. Высота подъема воды в вертикальном капилляре не зависит от угла наклона ветвей, а зависит только от соотношения радиусов капилляров. При этом величина $h_{кр}$ определится для правой и левой ветвей соотношениями:

$$h_{крпр}=(m+n+1)(\frac{r_3^2}{r_1^2})h_3, \tag{17}$$

$$h_{крлв}=\frac{m+n+1}{n}(\frac{r_2^2}{r_1^2})h_2. \tag{18}$$

Физический смысл соотношений (17) и (18) состоит в том, что изменение радиуса любого из капилляров приводит к перераспределению действующих сил и при определенном соотношении размеров капилляров действующие в системе силы не обеспечивают подъем воды выше h. Нетрудно видеть, что $h_{крпр} = h_{крлв}$. Учитывая [1], что $h_2=2\sigma cos\alpha/r_2\rho g$ и условие $r_2=nr_3$ получим $h_2=2\sigma cos\alpha/nr_3\rho g$, откуда $h_2=h_3/n$. Подставляя последнее соотношения в (18) получим:

$$h=h_{крлв}=\frac{m+n+1}{n}n^2(\frac{r_3^2}{r_1^2})\frac{h_3}{n}=(m+n+1)(\frac{r_3^2}{r_1^2})h_3=h_{крпр}. \tag{19}$$

Разность высот подъема воды в боковых ветвях описывается соотношением

$$h_{1пр}^1-h_{1лв}^1=h_3-h_2+\frac{r_1^2}{m+n+1}(\frac{n}{r_2^2}-\frac{1}{r_3^2})h \tag{20}$$

и при $m=n=1$ становится равной нулю.

Анализ уравнений (17), (18) и (20) затруднителен из-за большой вариабельности соотношений величин m, n и h. Однако, построив графическое 3D изображение этих уравнений, можно получить представление о изменении разности высот подъема воды в ветвях и о изменении $h_{кр}$ в широком диапазоне изменения величин m, n и h. Разделив обе части (17) на h_3 и учитывая, что $r_1 = mr_3$, получим:

$$\frac{h_{крпр}}{h_3}=\frac{m+n+1}{m^2}. \tag{21}$$

Результаты построения графиков для $h_{кр}$, с учетом (1), представлены на рис. 2.

Выбор h_3 в качестве нормирующей величины обусловлен следующими соображениями. Правый капилляр имеет наименьший радиус r_3 и, следовательно, высота подъема воды в одиночном вертикальном капилляре этого радиуса будет наибольшей по сравнению с капиллярами радиусов r_1 и r_2 [9]. Поэтому диапазон отношений $h_{крпр} / h_3$ будет находиться в пределах от 0 до 1 и может быть однозначно задан при построении 3D графиков.

Анализ графиков на рис. 2 позволяет выяснить, как изменяется величина $h_{кр}$ при изменении соотношения радиусов капилляров. Так, например, на рис. 2, а $m=3$, n изменяется от 1 до 2, а величина $h_{кр}$ находится в пределах $\approx 0,55 – 0,75h_3$. Увеличение радиуса вертикального капилляра приводит к уменьшению $h_{кр}$ и при m=10 $h_{кр} \approx 0,17h_3$.

Увеличение радиуса левого капилляра до n от 1 до 4 при m=5 (рис. 2, *в*) и выполнении условия (1) приводит к уменьшению критической высоты, которая в этом случае находится в пределах ≈ 0,24 – 0,4 h_3. С увеличением радиуса вертикального капилляра $h_{кр}$ уменьшается и при m=10, $h_{кр}$ ≈ 0,15h_3.

В случае, представленном на рис. 2, б, радиус r_1 больше радиуса r_3 в 10–20 раз, а r_2 может быть равен r_3 или превышать его до 9 раз. При этом соотношение $r_1/r_2=m/n$. Можно видеть, что при m=10 и изменении n от 1 до 9 величина $h_{кр}$ находится в пределах ≈ 0,17–0,2h_3, уменьшаясь при увеличении m до 20 до значения $h_{кр}$ ≈ 0,13h_3.

Общей закономерностью в рассмотренных случаях является то, что $h_{кр}$ тем больше, чем меньше разница в радиусах вертикального и боковых капилляров. С увеличением разницы в радиусах $h_{кр}$ уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю. Физическая интерпретация полученных результатов состоит в следующем. С увеличением h (рис. 1, б) или r_1 одновременно происходит несколько процессов. Вес воды в его нижней части высотой h увеличивается пропорционально r_1^2, а $F_н$ пропорциональна r_1, вследствие чего уменьшается высота подъема воды [9].

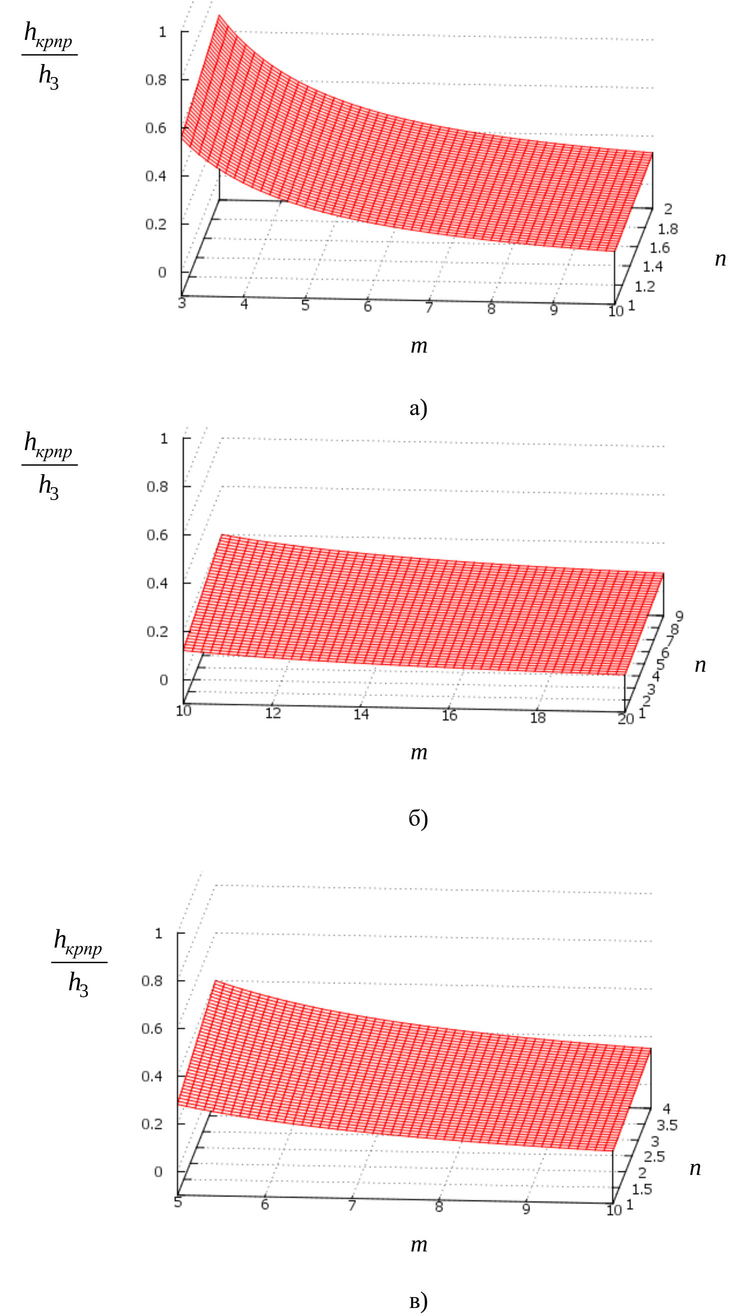


Рис. 2. Зависимость $h_{крпр}/h_3$ от соотношения m и n в диапазонах изменения:
а) m от 3 до 10, n от 1 до 2; б) m от 10 до 20, n от 1 до 9; в) m от 5 до 10, n от 1 до 4

В этом случае силам поверхностного натяжения в менисках боковых капилляров приходится «поднимать» пропорциональный их радиусу больший объем воды (высотой h). При этом следует ожидать уменьшения поступления

воды в боковые капилляры. И при достижении какого-то значения r_1 или h вода в боковые капилляры поступать не будет ($h_{кр}$).

Соотношение (20), описывающее разность высот подъема воды в боковых капиллярах, можно также представить в 3D графике. Выражая r_1 и r_2 через r_3, учитывая, что $h_2=h_3/n$ и нормируя по h_3, получим следующее соотношение:

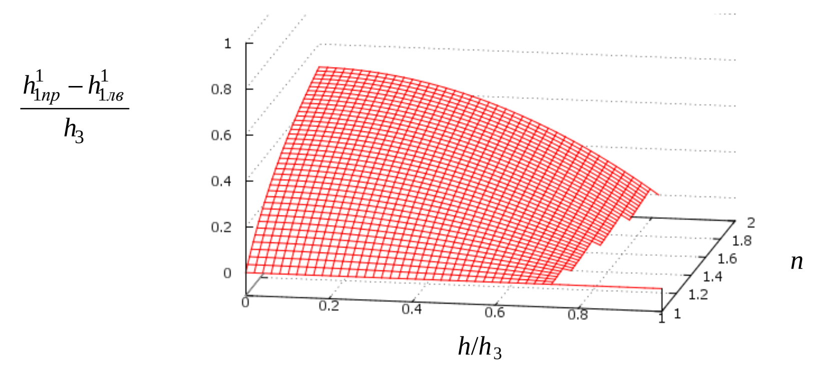
$$\frac{h^1_{1пр}-h^1_{1лв}}{h_3}=1-\frac{1}{n}+\frac{m^2}{m+n+1}(\frac{1}{n}-1)\delta, \qquad (22)$$

где $\delta = h/h_3$. Выражение (22) содержит 3 переменных: *m, n* и δ. Поскольку (22) нормировано по h_3, то $(h^1_{1пр}-h^1_{1лв})/h_3$ и δ изменяются в пределах от 0 до 1. Задавая теперь один из параметров постоянным, например, *m*, можно построить любую серию 3D графиков для (22). Некоторые из них представлены на рис. 3.

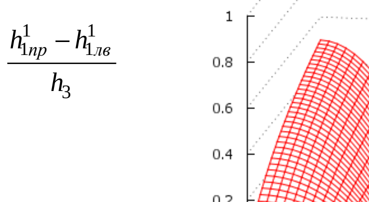
Анализ этих графиков показывает следующее. Если r_1 не сильно превышает r_2 и r_3 (рис. 3, *а*), то при δ=0 и *h*=0 величина $(h^1_{1пр}-h^1_{1лв})$ изменяется от 0,5h_3 (при *n*=2) до 0 (при *n*=1). Физическая интерпретация этого заключается в том, что при *n*=1, $r_2 = r_3$ каждый из трех капилляров оказывается независимо от остальных погруженным в источник воды и ее подъем в них определяется также, как и для одиночного погруженного в воду капилляра. При δ=0 (*h*=0) и *n*=2, $r_2 = 2r_3$ объем поднимаемой воды увеличивается и $h^1_{1пр}-h^1_{1лв}=0,5h_3$ По мере увеличения *h* и *n* (одновременно или порознь) разность $h^1_{1пр}-h^1_{1лв}$ уменьшается, так как $F_н$ в обоих боковых капиллярах частично и пропорционально радиусу расходуется на подъем воды на высоту *h* в вертикальном капилляре. При достижении δ≈0,7 (*h*≈0,7h_3) выражение $h^1_{1пр}-h^1_{1лв}$ становится равным нулю, так как величина *h* становится равной $h_{кр}$ и вода в боковые капилляры не поступает.

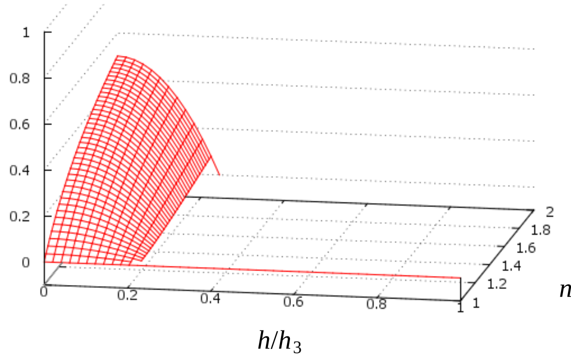
Если r_1 увеличивается до *m*=10 (рис. 3, *б*) и 1≤ *n*≤2, то все приведенные выше рассуждения сохраняются. Но $h_{кр}$ уменьшается и становится равной ≈0,2h_3, что связано с перераспределением сил в системе из-за необходимости подъема увеличившегося объема воды высотой h. Справедливость этого вывода проиллюстрирована на рис. 3, в. Если *m*=10, а 1≤ *n*≤9, то при *n*=1 и δ=0 по причинам, указанным выше, разность $h^1_{1пр}-h^1_{1лв}=0$. По мере роста n разность высот подъема воды в правом и левом капилляре увеличивается и достигает 0,9h_3 при *n*=9, то есть в правом капилляре вода поднимается в 9 раз выше, чем в левом, что вполне справедливо для одиночных погруженных в воду капилляров. По мере увеличения δ выражение $h^1_{1пр}-h^1_{1лв}$ уменьшается до нуля при величине *h* в диапазоне 0,3h_3–0,4h_3, который является критическим. Сравнивая эти критические величины с таковыми на рис. 3, а и рис. 3, б можно видеть, что $h_{кр}$ (рис. 3, в) находится в промежутке между величинами $h_{кр}$ на рис. 3, а и б.

Графики для других соотношений величин *m* и *n*, продемонстрированных на рис. 3, *г* и рис. 3, *д*, проявляют ту же тенденцию изменения $h^1_{1пр}-h^1_{1лв}$, как описано выше. Различие состоит только в скорости изменения $h^1_{1пр}-h^1_{1лв}$ и достижения $h_{кр}$.

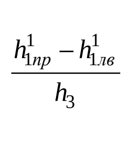


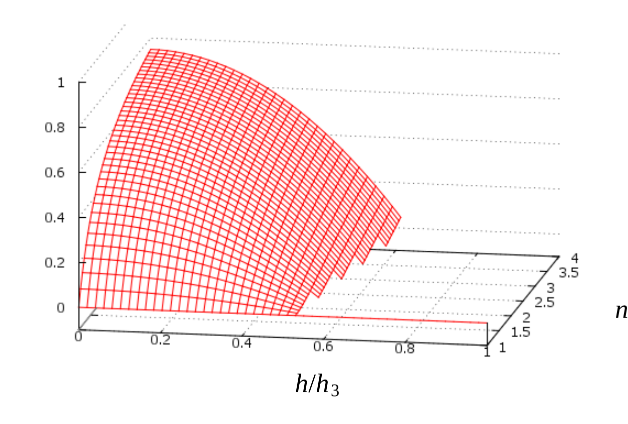
а) для *m*=3, *n*= 1–2



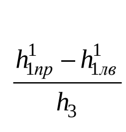


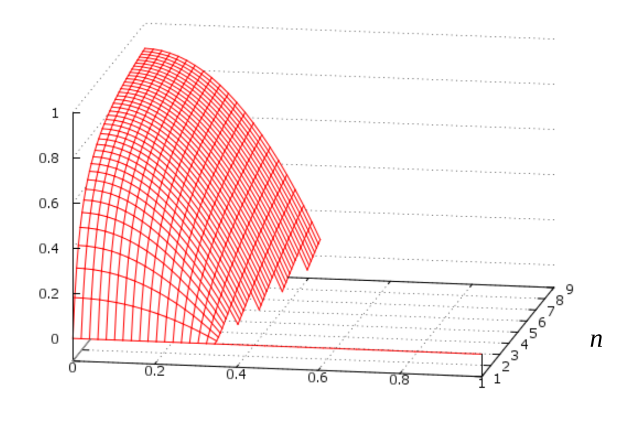
б) для *m*=10, *n* = 1– 2





в) для *m*=10, *n*=1–9

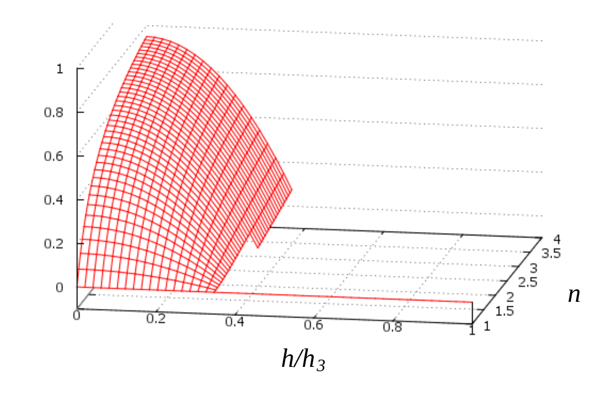




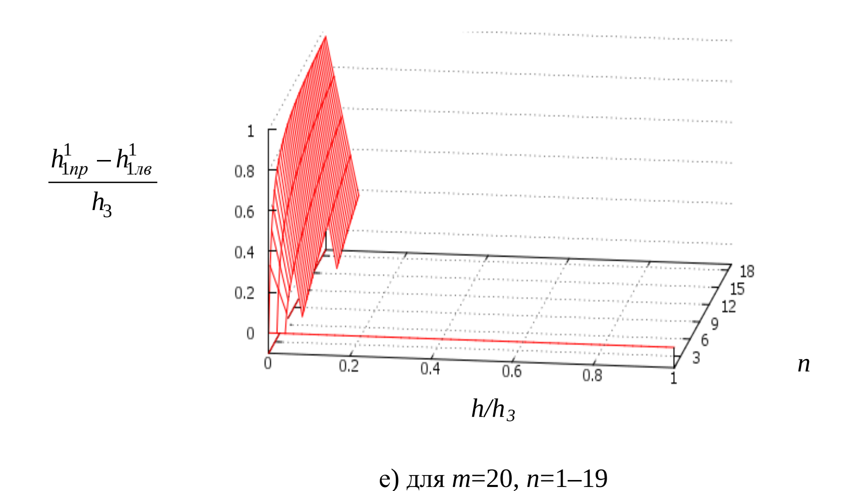
h/h_3

г) для *m*=5, *n*=1–4

$$\frac{h_{1np}^1 - h_{1лв}^1}{h_3}$$



д) для *m*=10, *n*=1–4



е) для m=20, n=1–19

Рис. 3. Зависимость $\frac{h^1_{1пр} - h^1_{1лв}}{h_3}$ от соотношения параметров m, n и δ при фиксированных значениях m.

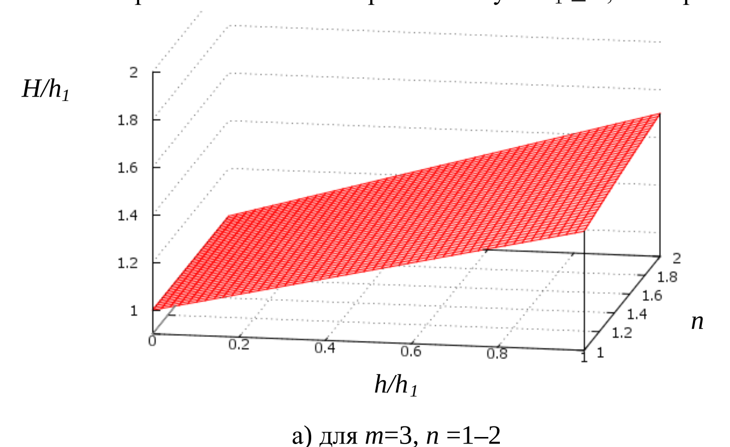
Величины m и диапазон изменения n указаны в подрисуночных надписях

Более наглядно это можно видеть на рис. 3, е, где m=20, а $1 \le n \le 19$. Видно, что при увеличении n от 1 до 19 разность высот изменяется при n=1 и δ=0 от 0 до $\approx 0{,}95h_3$ и по мере увеличения δ уменьшается до нуля при $h_{кр}$ в диапазоне $0{,}2h_3$–$0{,}3h_3$.

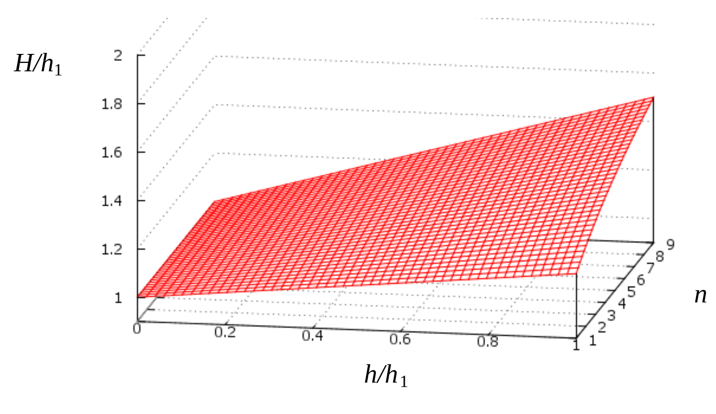
Применяя описанную выше методику к (16), получим соотношение для построения в 3D графике величины H/h_1 в виде

$$H / h_1 = 1 + (1 - m / (m + n + 1))\delta_H , \qquad (23)$$

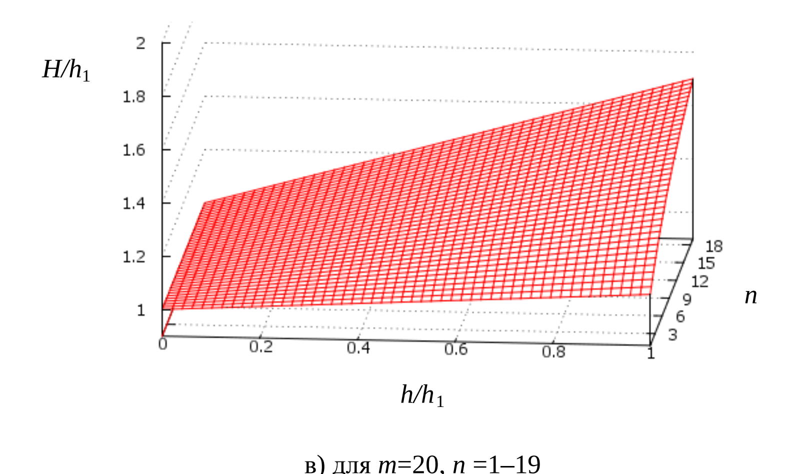
где $\delta_H = h / h_1$; h_1 — высота подъема воды в одиночном вертикальном капилляре радиуса r_1. Нормирование по h_1 обусловлено следующим. В [9] показано, что наличие боковых капилляров в ветвящейся системе приводит к увеличению подъема воды в связанном с ними вертикальном капилляре. Поэтому $H/h_1 \ge 1$, в то время как $0 \le \delta_H = h/h_1 \le 1$.



а) для m=3, n =1–2



б) для m=10, n =1–9



в) для m=20, n =1–19

Рис. 4. Зависимость H/h_1 от соотношения параметров *m, n* и δ_H при фиксированных значениях *m*. Величины *m* и диапазон изменения *n* указаны в подрисуночных надписях

Результаты построения графиков для H/h_1, при различных значениях *m, n* и δ_H, представлены на рис. 4. Из рис. 4 а, б, в следует, что при любом соотношении параметров *m, n* и δ_H=0, $H=h_1$, то есть вода поднимается как в одиночном вертикальном капилляре радиуса r_1. Если радиусы вертикального и боковых капилляров отличаются несущественно (рис. 4, а), то высота подъема воды в вертикальном капилляре по мере увеличения δ_H увеличивается и при достижении δ_H=1, в зависимости от *n*, $H\approx1{,}3h_1$–1,5 h_1. Физически это означает, что наличие боковых капилляров позволяет воде подняться на высоту, превышающую h_1 в 1,3 раза. При увеличении *m, n*, как показано на рис. 4, б при *m*=10, величина подъема воды зависит от величины *n*. Так при *n*=1, *H*≈1,17 и при *n*=9 достигает значения *H*≈1,5. Физический смысл этого заключается в том, что по мере роста *n* (при *m*=const), боковые капилляры берут на себя все больше «работы» по подъему воды в вертикальном капилляре, позволяя силе поверхностного натяжения в нем поднять воду на большую высоту. Если *m*=20 (рис. 4, в) и *n*=1, *H*≈1,09, а при *n*=19, *H*≈1,5. Таким образом, при *n*=1 величина *H* уменьшается, а при дальнейшем росте *m, n* увеличивается, асимптотически приближаясь к *H*=2.

Аналогичным образом можно построить 3D графики для $h^1_{1пр}, h^1_{1лв}$ и, задавая величины углов $\beta^1_{1лв}, \beta^1_{1пр}$, для $L^1_{1пр}, L^1_{1лв}$.

Выводы.

1. Построена модель подъема воды в капиллярной системе с цилиндрическими капиллярами разного радиуса. Вследствие большого количества переменных и их высокой вариабельности для анализа полученных соотношений авторы воспользовались 3D графикой.

2. Показано, что изменение параметров капиллярной системы приводит к перераспределению действующих в ней сил и разность высот подъема воды в боковых капиллярах может изменяться от 0 до 0,95 высоты подъема воды одиночного вертикального капилляра системы, имеющего наименьший радиус.

3. Установлено, что при определенных соотношениях параметров капиллярной системы существует критическая высота, при которой вода в боковые капилляры не поступает. С увеличением разницы в радиусах вертикального и боковых капилляров или увеличением высоты части вертикального капилляра, на которую действуют силы поверхностного натяжения, критическая высота уменьшается.

4. Высота подъема воды в вертикальном капилляре зависит от соотношения радиусов вертикального и боковых капилляров, а также от высоты части вертикального капилляра, предшествующей разветвлению. Если величина последней равна нулю, то подъем воды в вертикальном капилляре не зависит от наличия боковых капилляров. Увеличение радиусов боковых капилляров при наличии общей части вертикального капилляра и при постоянстве его радиуса приводит к повышению уровня воды. Это связано с уменьшением разницы в радиусах боковых и вертикального капилляров. Боковые капилляры принимают все большее участие (пропорциональное их радиусам) в подъеме воды в общей вертикальной части. При этом высота подъема воды в вертикальном капилляре в рассматриваемой модели может до 2-х раз превышать высоту подъема воды в одиночном вертикальном капилляре того же радиуса.

Библиографический список

1. Кузнецов, В. В. Физиология растений / В. В. Кузнецов, Г. А. Дмитриева. — Москва : Высшая школа, 2006. — 742 с.

2. Zeiger, T. Plant Physiology / T. Zeiger, E. Lond. 2002, 3rd Edition, Sinauer Associated, Inc.Sunderland, MA, 690 pp.

3. Тимонин, А. К. Ботаника : Высшие растения / А. К. Тимонин. — Москва : Издательский центр «Академия», 2007. — 352 с.

4. Myburg, A. A. Xylem Structure and Function. Encyclopedia of life science / A. A. Myburg, R. Sederoff. — Nature, Publishing Group, 2001. — pp. 1–9.

5. Ботаника / П. Зитте [и др.]; пер. с немецкого. — Москва : Издательский центр «Академия», 2008. — 367 с.

6. Pfautsch, S. Phloem as Capacitor: Radial Transfer of Water into Xylem of Trees Stems Occurs via Symplastic Transport in Ray Parenchyma / S. Pfautsch, J. Renard, M. G. Tjoelker, A. Salih / Plant Physiology, March 2015. — vol. 167, № 3. — pp. 963–971.

7. Borghetty, M. Water transport in plant under climatic stress / M. Borghetty, J. Grace, A. Raschi / Cambridge University Press, Cambridge, 1993. — pp. 300.

8. Harvay, B. R. The theory of the rise of sap in trees: Some historical and conceptual remarks / B. R. Harvay. Physics in Perspective, 15 (2013). — pp. 320–358.

9. Вернигоров, Ю. М. Математическое моделирование распределения жидкости в ветвящихся капиллярных системах / Ю. М. Вернигоров, И. А. Кипнис // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2010. — Т. 10, № 8 (51). — С. 1195–1206.

10. Кипнис, И. А. Механизм продвижения воды в капиллярах ксилемы растений / И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров / Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2014. — Т. 14, № 3 (78). — С. 78–88.

11. Кипнис, И. А. Математическая модель подъема воды в простых криволинейных капиллярах / И. А. Кипнис, Ю. М. Вернигоров / Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2013. — № 5/6 (74). — С. 110–120.

12. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. — Москва : Наука, 1968. — 940 с.

References

1. Kuznetsov, V.V., Dmitrieva, G.A. Fiziologiya rasteniy. [Plant physiology.] Moscow: Vysshaya shkola, 2006, 742 p. (in Russian).

2. Zeiger, T., Lond, E. Plant Physiology, 3rd Edition, 2002, Sinauer Associated, Inc.Sunderland, MA, 690 p.

3. Timonin, A.K. Botanika: Vysshie rasteniya. [Botany: Higher plants.] Moscow: Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», 2007, 352 p. (in Russian).

4. Myburg, A.A., Sederoff, R. Xylem Structure and Function. Encyclopedia of life science. Nature, Publishing Group, 2001, pp. 1–9.

5. Sitte, P., et al. Botanika. [Botany.]; transl. from German. Moscow: Izdatel'skiy tsentr «Akademiya», 2008, 367 p. (in Russian).

6. Pfautsch, S., Renard, J., Tjoelker, M.G., Salih, A. Phloem as Capacitor: Radial Transfer of Water into Xylem of Trees Stems Occurs via Symplastic Transport in Ray Parenchyma. Plant Physiology, March 2015, vol. 167, no. 3, pp. 963–971.

7. Borghetty, M., Grace, J., Raschi, A. Water transport in plant under climatic stress. Cambridge University Press, Cambridge, 1993, 30 p.

8. Harvay, B.R. The theory of the rise of sap in trees: Some historical and conceptual remarks. Physics in Perspective, 2013, vol. 15, iss. 3, pp. 320–358.

9. Vernigorov, Y.M., Kipnis, I.A. Matematicheskoe modelirovanie raspredeleniya zhidkosti v vetvyashchikhsya kapillyarnykh sistemakh. [Mathematical modeling of liquid distribution in branch capillary systems.] Vestnik of DSTU, 2010, vol. 10, no. 8 (51), pp. 1195–1206 (in Russian).

10. Kipnis, I.A., Vernigorov, Y.M. Mekhanizm prodvizheniya vody v kapillyarakh ksilemy rasteniy. [Mechanism of promotion of water in the xylem capillaries plants.] Vestnik of DSTU, 2014, vol. 14, no. 3 (78), pp. 78–88 (in Russian).

11. Kipnis, I.A., Vernigorov, Y.M. Matematicheskaya model' pod"ema vody v prostykh krivolineynykh kapillyarakh. [Water rise mathematical model in simple curvilinear capillaries.] Vestnik of DSTU, 2013, no. 5/6 (74), pp. 110–120 (in Russian).

12. Yavorskiy, B.M., Detlaf, A.A. Spravochnik po fizike. [Reference book on Physics.] Moscow: Nauka, 1968, 940 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 14.02.2015
Сдана в редакцию 18.02.2015
Запланирована в номер 23.03.2016